# 第 45 講　整数問題の攻め方 その１

**45**　変数はすべて整数として，次の各問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$，$0<x\leqq y$ を満たす $x$，$y$ をすべて求めよ．

(2)　$\sqrt{n^2-12n+180}$ が自然数となるような $n$ をすべて求めよ．

(3)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ を満たす $x$，$y$，$z$ をすべて求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 45 講　整数問題の攻め方 その 1

45　$a$，$b$，$c$，$d$ を自然数として，$abcd=a+b+c+d$ かつ $a \leqq b \leqq c \leqq d$ を満たすものを求めよ．

【選択肢】

㋐　$(a, b, c, d)=(1, 1, 2, 4)$　　㋑　$(a, b, c, d)=(1, 2, 2, 4)$

㋒　$(a, b, c, d)=(1, 2, 4, 4)$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第45講　整数問題の攻め方 その1

45　変数はすべて整数として，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$，$0<x\leqq y$ を満たす $x$，$y$ をすべて求めよ．

(2) $\sqrt{n^2-12n+180}$ が自然数となるような $n$ をすべて求めよ．

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ を満たす $x$，$y$，$z$ をすべて求めよ．

**【答】** (1) $(x,\ y)=(5,\ 20),\ (6,\ 12),\ (8,\ 8)$

(2) $n=-29,\ -10,\ -3,\ 1,\ 6,\ 11,\ 15,\ 22,\ 41$

(3) $(x,\ y,\ z)=(3,\ 7,\ 42),\ (3,\ 42,\ 7),\ (7,\ 3,\ 42),\ (7,\ 42,\ 3),\ (42,\ 3,\ 7),\ (42,\ 7,\ 3),$
$(3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 24,\ 8),\ (8,\ 3,\ 24),\ (8,\ 24,\ 3),\ (24,\ 3,\ 8),\ (24,\ 8,\ 3),$
$(3,\ 9,\ 18),\ (3,\ 18,\ 9),\ (9,\ 3,\ 18),\ (9,\ 18,\ 3),\ (18,\ 3,\ 9),\ (18,\ 9,\ 3),$
$(3,\ 10,\ 15),\ (3,\ 15,\ 10),\ (10,\ 3,\ 15),\ (10,\ 15,\ 3),\ (15,\ 3,\ 10),\ (15,\ 10,\ 3),$
$(3,\ 12,\ 12),\ (12,\ 12,\ 3),\ (12,\ 3,\ 12),$
$(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 20,\ 5),\ (5,\ 4,\ 20),\ (5,\ 20,\ 4),\ (20,\ 4,\ 5),\ (20,\ 5,\ 4),$
$(4,\ 6,\ 12),\ (4,\ 12,\ 6),\ (6,\ 4,\ 12),\ (6,\ 12,\ 4),\ (12,\ 4,\ 6),\ (12,\ 6,\ 4),$
$(4,\ 8,\ 8),\ (8,\ 8,\ 4),\ (8,\ 4,\ 8),$
$(5,\ 5,\ 10),\ (5,\ 10,\ 5),\ (10,\ 5,\ 5),$
$(6,\ 6,\ 6)$

**【解答】**

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ より $4y+4x=xy$　ゆえに $(x-4)(y-4)=16$　……①　と変形できる．

ここで $0<x\leqq y$ より $-4<x-4\leqq y-4$ であるので，①を満たすものは

$$(x-4,\ y-4)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4)$$

に限る．

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(5,\ 20),\ (6,\ 12),\ (8,\ 8)}$

(2) $m$ を自然数とすると　$\sqrt{n^2-12n+180}=\sqrt{(n-6)^2+144}=m$ とおける．

これより $144=m^2-(n-6)^2$　ゆえに $144=\{m-(n-6)\}\{m+(n-6)\}$

これを満たすものは

$$(m,\ n-6)=(37,\ \pm35),\ (20,\ \pm16),\ (15,\ \pm9),\ (13,\ \pm5),\ (12,\ 0)$$

に限る．

よって　$\boldsymbol{n=-29,\ -10,\ -3,\ 1,\ 6,\ 11,\ 15,\ 22,\ 41}$

(3) まずは $(0<)x\leqq y\leqq z$ となるものを考える．このとき $\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{z}$ である．

ここで $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{3}{x}$ より $x\leqq 6$ を得る．

$x=1,\ 2$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geqq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ となり，これらを満たす自然数 $y$，$z$ は存在しない．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$x=3$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　ゆえに $(y-6)(z-6)=36$

ここで $3\leqq y\leqq z$ より $-3\leqq y-6\leqq z-6$ となるので，

$(y-6,\ z-6)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9),\ (6,\ 6)$

よって $(y,\ z)=(7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15),\ (12,\ 12)$

$x=4$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　ゆえに $(y-4)(z-4)=16$

ここで $4\leqq y\leqq z$ より $0\leqq y-4\leqq z-4$ となるので，(1)と同様に

$(y,\ z)=(5,\ 20),\ (6,\ 12),\ (8,\ 8)$

$x=5$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}$　ゆえに $(3y-10)(3z-10)=100$

ここで $5\leqq y\leqq z$ より $5\leqq 3y-10\leqq 3z-10$ であり，$3y-10=3(y-4)+2$ より $3y-10$ は 3 で割ると 2 余る数であるから $(3y-10,\ 3z-10)=(5,\ 20)$

よって $(y,\ z)=(5,\ 10)$

$x=6$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　ゆえに $(y-3)(z-3)=9$

ここで $6\leqq y\leqq z$ より $3\leqq y-3\leqq z-3$ となるので，$(y-3,\ z-3)=(3,\ 3)$

よって $(y,\ z)=(6,\ 6)$

以上より，$x\leqq y\leqq z$ ではない場合の解も考えると

**$(x,\ y,\ z)=$(3, 7, 42), (3, 42, 7), (7, 3, 42), (7, 42, 3), (42, 3, 7), (42, 7, 3),**
**(3, 8, 24), (3, 24, 8), (8, 3, 24), (8, 24, 3), (24, 3, 8), (24, 8, 3),**
**(3, 9, 18), (3, 18, 9), (9, 3, 18), (9, 18, 3), (18, 3, 9), (18, 9, 3),**
**(3, 10, 15), (3, 15, 10), (10, 3, 15), (10, 15, 3), (15, 3, 10), (15, 10, 3),**
**(3, 12, 12), (12, 12, 3), (12, 3, 12),**
**(4, 5, 20), (4, 20, 5), (5, 4, 20), (5, 20, 4), (20, 4, 5), (20, 5, 4),**
**(4, 6, 12), (4, 12, 6), (6, 4, 12), (6, 12, 4), (12, 4, 6), (12, 6, 4),**
**(4, 8, 8), (8, 8, 4), (8, 4, 8),**
**(5, 5, 10), (5, 10, 5), (10, 5, 5),**
**(6, 6, 6)**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 45 講　整数問題の攻め方 その 1

45　$a$，$b$，$c$，$d$ を自然数として，$abcd=a+b+c+d$ かつ $a\leqq b\leqq c\leqq d$ を満たすものを求めよ．

**【選択肢】**

㋐　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$　　㋑　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 2,\ 4)$

㋒　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 4,\ 4)$

**【答】**　㋐

**【解答】**

$a\leqq b\leqq c\leqq d$ より $abcd=a+b+c+d\leqq 4d$ となるので，$d>0$ より $abc\leqq 4$

これを満たすのは $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 1,\ 3)$，$(1,\ 1,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 2)$ に限る．

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $d=3+d$ となり，これを満たす $d$ は存在しない．

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 2)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $2d=4+d$ となり，これより $d=4$

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 3)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $3d=5+d$ となり，これより $d=\dfrac{5}{2}$　$d$ は自然数より不適．

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 4)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $4d=6+d$ となり，これより $d=2$　このとき $c>d$ となり不適．

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 2)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $4d=5+d$ となり，これより $d=\dfrac{5}{3}$　$d$ は自然数より不適．

以上より，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。